

高三数学考试参考答案

1. A 【解析】本题考查集合的运算,考查数学运算的核心素养.

$A=(-3,3), B=(-\infty,2)$, 则 $A \cap B=(-3,2)$.

2. D 【解析】本题考查复数的有关概念,考查数学运算的核心素养.

设 $z=a+bi(a \in \mathbf{R})$, 则 $\bar{z}=a-bi$, 由 $zi=\bar{z}$, 可得 $(a+bi)i=a-bi$, 化简可得 $-1+ai=a-bi$, 所以 $a=-1$, 则 $z=-1+bi$.

3. B 【解析】本题考查三角恒等变换,考查数学运算的核心素养.

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1-5}{1+5} = -\frac{2}{3}.$$

4. D 【解析】本题考查导数的几何意义,考查数学运算的核心素养.

$$\because f(x) = x^4 - x^3, \therefore f'(x) = 4x^3 - 3x^2, \therefore f(-1) = 2, f'(-1) = -7,$$

\therefore 所求的切线方程为 $y-2=-7(x+1)$, 即 $y=-7x-5$.

5. C 【解析】本题考查抛物线,考查直观想象的核心素养.

由 $|AF|=3|OF|$, 可得 $x_0 + \frac{p}{2} = \frac{3p}{2}$, 所以 $x_0 = p$, 则 $4=2p^2$, 解得 $p=\sqrt{2}$.

6. D 【解析】本题考查函数的单调性,考查数学抽象的核心素养.

显然 $y=f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增不符合题意, 故 $y=f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, 所以

$$\begin{cases} 0 < a < 1, \\ 3a-2 \geq \log_a 1-1, \end{cases} \quad \text{解得 } \frac{1}{3} \leq a < 1.$$

7. B 【解析】本题考查圆锥的体积,考查空间想象能力.

因为 $h_1+h_2=h$ 且图①和②内所装水的体积相等, 所以根据相似可知 $(\frac{h_2}{h})^3 = \frac{1}{2}$, 即 $\frac{h}{h_2} = \sqrt[3]{2}$.

8. D 【解析】本题考查等差数列,考查逻辑推理的核心素养.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $S_n = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$. 又 $\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n} = 2$, 所以 $\sqrt{S_n} = 2n + m$, 即 $S_n = 4n^2 + 4nm + m^2$, 所以 $m=0$, 则 $S_n = 4n^2$, 所以 $a_1 = S_1 = 4$.

9. ACD 【解析】本题考查统计,考查数据分析的核心素养.

对于 A, 2023 年 1 月至 6 月的月销售额的极差为 8, 故 A 正确; 对于 B, 因为 $6 \times 60\% = 3.6$, 所以 2023 年 1 月至 6 月的月销售额的第 60 百分位数为 11, 故 B 错误; 对于 C, 2023 年 1 月至 6 月的月销售额的中位数为 9.5, 故 C 正确; 对于 D, 设 2022 年 5 月的月销售额为 x 万元, 则 $\frac{11-x}{x} \times 100\% = 10\%$, 解得 $x=10$, 故 D 正确. 故选 ACD.

10. ABC 【解析】本题考查抽象函数,考查逻辑推理的核心素养.

令 $x=y=0$, 可得 $f(0)=0$, 故 A 正确; 令 $x=y=1$, 可得 $f(2)=2$, 令 $x=-2, y=2$, 可得 $f(0)-8=f(2)+f(-2)$, 则 $f(-2)=-10$, 故 B 正确;

由 $f(x+y)+2xy=f(x)+f(y)$, 可得 $f(x+y)+(x+y)^2=f(x)+x^2+f(y)+y^2$, 令 $g(x)$



$=f(x)+x^2$, 则 $g(x+y)=g(x)+g(y)$, 令 $x=y=0$, 可得 $g(0)=0$, 令 $y=-x$, 则 $g(0)=g(x)+g(-x)=0$, 所以 $g(x)$ 是奇函数, 即 $y=f(x)+x^2$ 是奇函数, 故 C 正确;
因为 $f(2)-2^2 \neq f(-2)-(-2)^2$, 所以 $y=f(x)-x^2$ 不是偶函数, 故 D 错误.

11. BD 【解析】本题考查三角函数, 考查数学建模的核心素养.

由题意可知 $\frac{2\pi}{|\omega|}=120$, 且 $\omega>0$, 解得 $\omega=\frac{\pi}{60}$ (rad/s),

所以 $f(t)=10\sin\frac{\pi t}{60}$, $g(t)=10\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi t}{60})=10\cos\frac{\pi t}{60}$.

对于 A, 将 $f(t)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后, 所得图象对应的函数为 $y=10\sin(\frac{\pi t}{60}+\frac{\pi^2}{120}) \neq g(t)$, 故 A 错误;

对于 B, $y=f(t) \cdot g(t)=50\sin\frac{\pi t}{30}$, 最大值为 50, 故 B 正确;

对于 C, $y=f(t)+g(t)=10\sqrt{2}\sin(\frac{\pi t}{60}+\frac{\pi}{4})$ 在 $(60, 90)$ 上不是单调函数, 故 C 错误;

对于 D, 由 $f(t)+g(t) \geq 5\sqrt{6}$, 可得 $\sin(\frac{\pi t}{60}+\frac{\pi}{4}) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, 解得 $t \in [5+120k, 25+120k] (k \in \mathbf{Z})$, 故 D 正确.

12. BD 【解析】本题考查正方体以及点、线、面的位置关系, 考查直观想象和数学建模的核心素养.

如图 1, 取 AB 的中点 G , 连接 DG , 易得 $D_1E \parallel DG$, 取 CD 的中点 H , 连接 BH , 易得 $BH \parallel DG$, 再取 CH 的中点 M , 连接 FM , D_1M , 则 $FM \parallel BH$, 所以 $FM \parallel D_1E$, 则 FM 是平面 EFD_1 与正方体底面 $ABCD$ 的交线, 延长 MF , 与 AB 的延长线交于 N , 连接 EN , 交 BB_1 于 P , 则 $BB_1=3BP$, 且五边形 D_1EPFM 即平面 EFD_1 交正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的截面, 计算可得 $ED_1=2\sqrt{5}$, $D_1M=5$, $MF=\sqrt{5}$, $EP=\frac{10}{3}$, $PF=\frac{2\sqrt{13}}{3}$, 所以平面 EFD_1 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面的周长为 $\frac{25}{3}+\frac{2\sqrt{13}}{3}+3\sqrt{5}$, 故 C 错误.

对于 A, 因为 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AD}+\mu\overrightarrow{AA_1}$, $\lambda+\mu=1$,

所以 P, D, A_1 三点共线, 所以点 P 在 A_1D 上, 因为 A_1D 与平面 EFD_1 不平行, 所以四面体 $PEFD_1$ 的体积不为定值, A 错误.

对于 B, 如图 2, 以 A 为原点, 分别以 AB, AD, AA_1 所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, 则 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1}=(0, 2, 1)$,

$\overrightarrow{C_1P}=\overrightarrow{C_1A}+\overrightarrow{AP}=(-4, -2, -3)$, $\overrightarrow{D_1E}=(2, -4, 0)$, $\overrightarrow{EF}=(2, 2, -4)$, 则 $\overrightarrow{C_1P} \cdot \overrightarrow{D_1E}=0$, $\overrightarrow{C_1P} \cdot \overrightarrow{EF}=0$, 所以 $C_1P \perp$ 平面 EFD_1 , 故 B 正确.

对于 D, 若 $\lambda=1, \mu=0$, 则点 P 即点 D . 易知 $DD_1 \perp D_1E$, 则四面体 $PEFD_1$ 的外接球与四棱

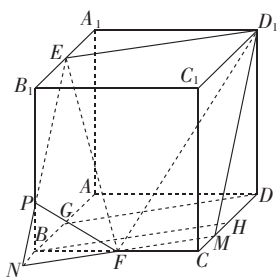


图 1

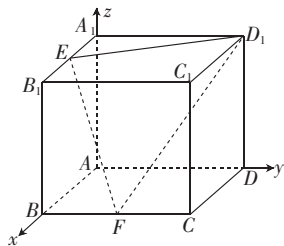


图 2



锥 $F-ED_1DG$ 的外接球相同, 在 $\triangle GFD$ 中, $GF=2\sqrt{2}$, $GD=2\sqrt{5}$, $FD=2\sqrt{5}$, 则 $\triangle GFD$ 外接圆的半径为 $\frac{2\sqrt{5}}{\frac{3\sqrt{10}}{10}} \times \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{3}$, 所以四面体 $PEFD_1$ 外接球的半径 $R = \sqrt{(\frac{5\sqrt{2}}{3})^2 + 2^2} =$

$\frac{\sqrt{86}}{3}$, 即四面体 $PEFD_1$ 外接球的表面积为 $\frac{344\pi}{9}$, D 正确. 故选 BD.

13. $-\frac{1}{2}$ 【解析】本题考查平面向量, 考查数学运算的核心素养.

由 $(a-mb) \perp b$, 可得 $(a-mb) \cdot b = a \cdot b - mb^2 = 0$, 则 $-2-4m=0$, 解得 $m = -\frac{1}{2}$.

14. $\frac{4}{9}$ 【解析】本题考查全概率公式, 考查逻辑推理的核心素养.

所求的概率 $P = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$.

15. -3 【解析】本题考查基本不等式, 考查逻辑推理的核心素养.

由 $b-a=1$, $a < 0 < b$, 可知 $b \in (0, 1)$, $a \in (-1, 0)$,

则 $\frac{a+1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b}{a} - \frac{b-a}{b} = \frac{b}{a} + \frac{a}{b} - 1 \leq -2-1 = -3$, 当且仅当 $a = -b$ 时, 取得最大值.

16. $\sqrt{3}$ 【解析】本题考查双曲线的离心率, 考查直观想象的核心素养.

结合双曲线的对称性可知, $\angle F_1AF_2 = \frac{\pi}{3}$, $|AF_1| = |AC|$, 所以 $\triangle ACF_1$ 为等边三角形,

则 $|AF_1| = |CF_1|$, 则 $AC \perp F_1F_2$, 由双曲线的定义, 得 $|AF_1| - |AF_2| = 2a$,

所以 $|AF_1| = 4a$, $|AF_2| = 2a$, 则 $\frac{|F_1F_2|}{|AF_2|} = \frac{2c}{2a} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

17. 解: (1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$, $b_3 = a_3 - 1 = 3$, 即 $a_3 = 4$, 1 分

$S_3 = b_1 + b_2 + b_3 = a_1 - 1 + a_2 + 2 + a_3 - 1 = a_1 + a_2 + a_3 = 7$, 2 分

所以 $\frac{4}{q^2} + \frac{4}{q} + 4 = 7$, 3 分

解得 $q = 2$ 或 $q = -\frac{2}{3}$ (舍去). 4 分

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = 4 \cdot 2^{n-3} = 2^{n-1}$ 5 分

(2) $S_{2n} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{2n} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n}) + n$ 7 分

$= \frac{1-2^{2n}}{1-2} + n = 2^{2n} + n - 1$ 10 分

评分细则:

【1】第一问, 也可正确求出 q 的值得 2 分, 正确求出 $a_1 = 1$ 得 2 分, 写出 $\{a_n\}$ 的通项公式得 1 分.

【2】第二问, 写出 $b_n = \begin{cases} 2^{n-1} - 1, n \text{ 为奇数}, \\ 2^{n-1} + 2, n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ 不得分, 求出 $b_1 + b_3 + \cdots + b_{2n-1} = \frac{4^n - 1}{3} - n$, 得 2

分, 求出 $b_2 + b_4 + \cdots + b_{2n} = \frac{2(4^n - 1)}{3} + 2n$, 得 2 分, 求出 $S_{2n} = 2^{2n} + n - 1$, 得 1 分.



18. 解: (1) 设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 R ,

因为 $b\cos C + c\cos B = 2\sqrt{3}\sin A$, 所以 $2R(\sin B\cos C + \sin C\cos B) = 2\sqrt{3}\sin A$, 2 分

所以 $2R\sin(B+C) = 2\sqrt{3}\sin A$, 解得 $R = \sqrt{3}$, 4 分

所以 $\triangle ABC$ 外接圆的面积为 3π 5 分

(2) 因为 $\frac{b}{\sin B} = 2\sqrt{3}$, 所以 $b = 3$, 故 $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 6 分

由余弦定理可得 $a^2 + c^2 - ac = b^2 = 9$, 则 $(a+c)^2 = 9 + 3ac$ 8 分

又 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot r$, $ac = a+c+3$, 9 分

则 $\frac{(a+c)^2 - 9}{3} = a+c+3$, 所以 $a+c-3 = 3$, 即 $a+c = 6$ 10 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot r = \frac{1}{2} \times 9 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ 12 分

评分细则:

若用其他解法, 参照评分标准按步骤给分.

19. 解: (1) X 的可能取值有 100, 60, 0, 1 分

$P(X=100) = \frac{2}{C_4^2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, 2 分

$P(X=60) = \frac{C_2^1 C_2^1}{C_4^2} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$, 3 分

$P(X=0) = 1 - P(X=100) - P(X=60) = \frac{2}{3}$, 4 分

所以 X 的分布列为

X	100	60	0
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$

..... 5 分

所以 $E(X) = 100 \times \frac{1}{9} + 60 \times \frac{2}{9} + 0 \times \frac{2}{3} = \frac{220}{9}$ 7 分

(2) 由(1)可知 $P(M) = \frac{2}{3}$, 8 分

又 $P(N) = \frac{1}{3}$, $P(MN) = \frac{2}{C_4^2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, 10 分

则 $P(MN) \neq P(M)P(N)$, 所以事件 M, N 不相互独立. 12 分

评分细则:

【1】第一问总共 7 分, 正确写对分布列可得 5 分, 求出数学期望得 2 分.

【2】第二问总共 5 分, 求出 $P(M) = \frac{2}{3}$ 得 1 分, 求出 $P(MN) = \frac{1}{9}$ 得 2 分, 说明件 M, N 不相

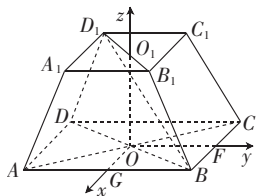


独立得 2 分.

20. (1) 证明: 连接 BD, B_1D_1 , 设正四棱台的上、下底面的中心分别为 O_1, O , 则 O_1, O 分别为 B_1D_1, BD 的中点, 连接 OO_1 . 因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正四棱台, 所以 $O_1O \perp$ 平面 $ABCD$, 又 $AC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $O_1O \perp AC$ 2 分
 因为 $ABCD$ 为正方形, 所以 $AC \perp BD$, 3 分
 又 $BD \cap OO_1 = O$, 所以 $AC \perp$ 平面 DBB_1D_1 , 4 分
 因为 $BD_1 \subset$ 平面 DBB_1D_1 , 所以 $AC \perp BD_1$ 5 分

(2) 解: 设 BC, AB 的中点分别为 F, G , 连接 OF, OG , 易知 OG, OF, OO_1 两两垂直,

则以 O 为坐标原点, 分别以 OG, OF, OO_1 所在直线为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $O(0, 0, 0), B(2, 2, 0), D_1(-1, -1, 3), C(-2, 2, 0), C_1(-1, 1, 3), B_1(1, 1, 3)$,

所以 $\overrightarrow{BD_1} = (-3, -3, 3), \overrightarrow{BC} = (-4, 0, 0), \overrightarrow{BB_1} = (-1, -1, 3), \overrightarrow{CC_1} =$

$(1, -1, 3)$ 6 分

设平面 BCC_1B_1 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_1, y_1, z_1)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = -4x_1 = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BB_1} = -x_1 - y_1 + 3z_1 = 0, \end{cases}$ 取 $z_1 = 1$, 则 $y_1 = 3, x_1 = 0$, 所以 $\mathbf{n} = (0, 3, 1)$ 8 分

设平面 α 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_2, y_2, z_2)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BD_1} = -3x_2 - 3y_2 + 3z_2 = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CC_1} = x_2 - y_2 + 3z_2 = 0, \end{cases}$ 取 $x_2 = 1$, 则 $y_2 = -2, z_2 = -1$, 所以 $\mathbf{m} = (1, -2, -1)$.

..... 10 分

设平面 α 与平面 BCC_1B_1 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta = |\cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{n}| |\mathbf{m}|} = \frac{7}{\sqrt{10} \times \sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{15}}{30}$,

所以平面 α 与平面 BCC_1B_1 夹角的余弦值为 $\frac{7\sqrt{15}}{30}$ 12 分

评分细则:

【1】在第一问中, 也可以延长 BB_1, DD_1 , 设二者相交于 M , 从而证明 $AC \perp$ 平面 DBM , 得 4 分, 进而证出 $AC \perp BD_1$, 得 1 分.

【2】若用其他解法, 参照评分标准按步骤给分.

21. 解: (1) 由题可知 $a = 2$, 1 分
 圆 $D: (x - 3a)^2 + y^2 = 2b^2$ 的圆心为 $D(3a, 0)$, 半径 $r = \sqrt{2}b$, 2 分
 所以 $|MP|_{\max} = |MD| + r = 2a + \sqrt{2}b = 6$, 所以 $b = \sqrt{2}$, 4 分
 所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 5 分

(2) 当直线 l 的斜率不存在时, 显然不符合题意,



故设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线 $AB: y = kx + m$,

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, \\ y = kx + m, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 整理得 } (1+2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 4 = 0,$$

方程 $(1+2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 4 = 0$ 的判别式 $\Delta = 32k^2 + 16 - 8m^2 > 0$,

$$\text{则} \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{4km}{1+2k^2}, \\ x_1 x_2 = \frac{2m^2 - 4}{1+2k^2}. \end{cases} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

因为 $k_{MA} \cdot k_{MB} = 1$, 所以 $\frac{y_1}{x_1 - 2} \cdot \frac{y_2}{x_2 - 2} = 1$,

所以 $(k^2 - 1)x_1 x_2 + (km + 2)(x_1 + x_2) + m^2 - 4 = 0$,

所以 $(k^2 - 1) \cdot \frac{2m^2 - 4}{1+2k^2} + (km + 2) \cdot (-\frac{4km}{1+2k^2}) + m^2 - 4 = 0$,

整理得 $(m + 2k)(m + 6k) = 0$. $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

若 $m = -2k$, 则 $y = kx - 2k = k(x - 2)$, 则直线 l 过定点 $M(2, 0)$, 与题意矛盾;

若 $m = -6k$, 则 $y = kx - 6k = k(x - 6)$, 则直线 l 过定点 $(6, 0)$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

因为圆 D 的圆心为 $(6, 0)$, 半径 $r = 2$, 所以直线 l 被圆 D 截得的弦长为 4. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$
评分细则:

【1】在第一问中, 求出 $a = 2$ 得 1 分, 求出 $b = \sqrt{2}$ 得 3 分, 写出椭圆 C 的方程得 1 分.

【2】第二问总共 7 分, 正确联立方程得 1 分, 写出韦达定理得 1 分, 得出直线过定点得 3 分, 得出直线 l 被圆 D 截得的弦长为 4, 得 2 分.

【3】若用其他解法, 参照评分标准按步骤给分.

22. (1) 证明: $f'(x) = \frac{-(x \sin x + \cos x)}{x^2}, x \in (0, \pi]$. $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

令 $g(x) = x \sin x + \cos x$, 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $g(x) > 0$, 故 $f'(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上无零点, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ 时, $g'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x < 0$, 即 $g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上单调递减.
 $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

又 $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 0, g(\pi) = -1 < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上有唯一零点.

综上, $f'(x)$ 存在唯一零点. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 解: 由 $f'(x) + \frac{a}{x^2} + a \leq 0$ 可得 $x \sin x + \cos x - a(x^2 + 1) \geq 0$,

设 $F(x) = x \sin x + \cos x - a(x^2 + 1), x \in (0, \pi]$,

$F'(x) = x \cos x - 2ax = x(\cos x - 2a)$,

当 $2a \leq -1$, 即 $a \leq -\frac{1}{2}$ 时, $F'(x) \geq 0, F(x)$ 在 $(0, \pi]$ 上单调递增,



$F(x)_{\max} = F(\pi) = -1 - a(\pi^2 + 1) \geq 0, a \leq -\frac{1}{\pi^2 + 1}$, 所以 $a \leq -\frac{1}{2}$ 成立. 7 分

当 $2a \geq 1$, 即 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $F'(x) \leq 0, F(x)$ 在 $(0, \pi]$ 上单调递减, 则 $1 - a > 0$, 即 $a < 1$, 所以 $\frac{1}{2} \leq a < 1$ 8 分

当 $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ 时, $\exists x_0 \in (0, \pi), \cos x_0 = 2a$,

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $\cos x > 2a, F'(x) > 0, F(x)$ 单调递增,

当 $x \in (x_0, \pi)$ 时, $\cos x < 2a, F'(x) < 0, F(x)$ 单调递减,

所以 $F(x)_{\max} = F(x_0) = x_0 \sin x_0 + \cos x_0 - a(x_0^2 + 1)$

$$= x_0 \sin x_0 + \cos x_0 - \frac{1}{2} \cos x_0 (x_0^2 + 1)$$

$$= x_0 \sin x_0 + \frac{1}{2} \cos x_0 - \frac{x_0^2}{2} \cos x_0. 10 分$$

$$\text{令 } \varphi(x) = x \sin x + \frac{1}{2} \cos x - \frac{x^2}{2} \cos x, x \in (0, \pi),$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{x^2}{2} \sin x > 0, \text{ 所以 } \varphi(x) > \varphi(0) = \frac{1}{2}, F(x_0) \geq 0 \text{ 成立.}$$

综上, a 的取值范围为 $(-\infty, 1)$ 12 分
评分细则:

【1】在第一问中, 也可以根据 $g'(x) = x \cos x$, 说明 $g(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增, 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上单调递减, 得 3 分, 又因为 $g(0) > 0, g(\frac{\pi}{2}) > 0, g(\pi) < 0$, 则 $g(x)$ 在 $(0, \pi]$ 上存在唯一的零点, 所以 $f'(x)$ 存在唯一零点, 得 2 分.

【2】若用其他解法, 参照评分标准按步骤给分.

